数理解析研究所講究録
140巻 1972年 238-267

多値しきい値関数について

羽賀隆洋　　福村晃夫
(名古屋大学　工学部)

1. はじめに

しきい値素子は，その動作の一部にアナログ加算を含み，そのままでアナログ入力の場合に用いることができる。したがって，多値論理素子としても有用であると考えられる。

多値しきい値素子については，多くの場合，2値の性質を自然に拡張した性質を調べることがおこなわれている。ここでは，多値に拡張したことにより新たに生じる1つの問題点を指摘し，その解決法を考える。

すなわち，入力値として用いるp個の数値（電圧値などに対応）を$\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ ($\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$)とするとき，$\{\alpha_i\}$の選び方により同一の論理関数がしきい値関数であったり，そうでなかったりすることがある。これは，2値の場合にはなかった性質である。この性質のため，p値論理関数をp値しきい値素子回路で合成する場合，入力値として用いる電圧値などを変更するたびに新たに回路の結線を設計しなおす必要が生じる。

この困難さをさける1つの方法として，回路合成に用いる素子を，任意の$\{\alpha_i\}$においてしきい値関数である論理関数(普遍しきい値関数)に対応する素子(普遍しきい値素子)のみに限定することが考えられる．

普遍しきい値関数のうちでも，p-adic関数となずけられる関数が簡単な性質をもち有用であることが知られる．そこでp-adic関数の性質を調べ，またp-adic関数のみを用いて与えられた論理関数を実現する手順などを考察する．

2. p値しきい値関数とその基本的性質

2.1 p値しきい値関数の定義

【定義1】式(1)を満たす重み$a=(a_1,\cdots,a_n;t_1,\cdots,t_{p-1})$が存在する$p$値論理関数$F_n=F_n(x_1,\cdots,x_n)$を$p$値しきい値関数とよぶ．

$$\left.\begin{array}{lcl} F_n(\rho)=\alpha_p & \Leftrightarrow & f(\rho)>t_{p-1} \\ F_n(\rho)=\alpha_{p-1} & \Leftrightarrow & t_{p-1}>f(\rho)>t_{p-2} \\ \cdots\cdots & & \\ F_n(\rho)=\alpha_1 & \Leftrightarrow & t_1>f(\rho) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ただし，$f(\rho)=a_1x_1(\rho)+\cdots+a_nx_n(\rho)$，$t_1\leqq\cdots\leqq t_{p-1}$とする．また，$\alpha_1<\cdots<\alpha_p$は$p$個の論理値に対応する数値(すなわち，変数$x_i$および関数$F_n$のとり得る値)，$\rho$は$p^n$個の頂点

$x=(x_1,\cdots,x_n)$に適当につけられた番号とする．

【定義2】否定演算ーを，式（2）で定義する．

$$\overline{\alpha_i} = \alpha_{p-i+1} \tag{2}$$

否定関数$\overline{x}$はしきい値関数[注)]である．

【定義3】$\alpha_1+\alpha_p=\alpha_2+\alpha_{p-1}=\cdots=0$を満たす論理値を対称論理値とよび，$\mathcal{A}_p=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}$であらわす．

対称論理値$\mathcal{A}_p$にたいしては，式（2）の否定は式（3）で与えられる．

$$\overline{x} = -x \tag{3}$$

したがって，対称論理値においては，否定素子の物理的構成が容易であり，また，F_nがしきい値関数ならばF_nに同族[注)]な関数はすべてしきい値関数でありそれらの重みの関係も2値の場合と同様に与えられる．

2つの対称論理値$\mathcal{A}_p$，$\mathcal{A}_p'$が，線形な関係

$$\alpha_i' = c\alpha_i + d \quad (i=1,\cdots,p;\ \alpha_1<\cdots<\alpha_p,\ \alpha_1'<\cdots<\alpha_p')$$

にあるとき，関数F_nが$\mathcal{A}_p$でしきい値関数であればF_nは$\mathcal{A}_p'$においてもしきい値関数である．しかし，線形の関係にない$\mathcal{A}_p,\mathcal{A}_p'$については一般には上述のことがらは成立しない．以上より，

注）混同のおそれがない場合は，“p値”を略す．

注）G_nが変数の否定・置換，関数の否定の操作によってF_nに等しくなり得るとき，G_nはF_nと同族であるとよぶ．

線形の関係にある2つの対称論理値を同一視することができる．すなわち，$\alpha_p=1$ である対称論理値 A_p のみを考えればよい．以下，特にことわらないかぎり，論理値 A_p は $\alpha_p=1$ の対称論理値（したがって，$\alpha_1=-1$）であるとする．$p=2,3$ については，$A_2=\{-1,1\}$，$A_3=\{-1,0,1\}$ の1種類のみを考えることになる．

対称論理値のうちでも，α_i が等間隔をなすものが重要な役割をはたす．

【定義4】α_i が式（4）で与えられる対称論理値 A_p を等差論理値とよび A_p^* であらわす．

$$\alpha_i=(2i-p-1)/(p-1) \quad (i=1,\cdots,p) \tag{4}$$

2.2 p 値しきい値関数の万能性

【性質1】p 値しきい値関数の集合は，任意の対称論理値 A_p において万能系を成す．

（証）文献［1］の3値の場合の証明を一般化して証明される．すなわち，与えられた関数の真理値表をそのまましきい値素子回路に移せばよい．（証了）

性質1はまた，後に述べる性質9からも示される．その性質9によれば，2個の特別な p 値しきい値関数からなる集合で任意の A_p にたいして万能系となるものが存在する．

論理関数F_nがそれ自身のみで万能となるとき，F_nはpolyphecknとよばれ[2)]，回路合成の面で興味をもたれている．しきい値関数でpolyphecknのものが存在するかどうかが問題となるが，$p=3, 4$については存在することが知られる．$p \geqq 5$についても存在すると予想される．

Słupeckiの定理[2)]により，すべての1変数関数が合成できるかどうかを調べることにより，3値2変数しきい値関数のうちpolyphecknであるのは表1の11個の関数であり，それがすべてである[注)]ことが知られた．また，4値2変数しきい値関数でpolyphecknとなるものは，たとえば，表2の関数である．

①

x_2 \ x_1	1	2	3
3	2	1	1
2	2	1	1
1	3	2	1

②

3	2	1
3	3	2
3	3	2

③

3	3	1
3	3	1
3	3	2

④

3	2	1
3	1	1
2	1	1

⑤

2	1	1
3	1	1
3	2	1

⑥

3	3	2
3	3	1
3	2	1

⑦

3	2	1
3	3	1
3	3	2

⑧

3	3	1
3	1	1
2	1	1

⑨

2	1	1
3	1	1
3	3	1

⑩

3	3	2
3	3	1
3	1	1

⑪

3	1	1
3	3	1
3	3	2

表1.　3値2変数しきい値関数中のpolyphecknのすべて

注）ただし，変数の置換により表1，2の関数に等しくなる関数は省略してある．また，表中においては，x_iを単にiであらわす．

①

x_2 \ x_1	1	2	3	4
4	2	1	1	1
3	3	1	1	1
2	3	1	1	1
1	4	2	1	1

②

3	2	1	1
3	2	1	1
3	3	1	1
4	3	2	1

③

3	2	1	1
3	2	1	1
3	3	2	1
4	3	2	1

④

3	2	1	1
3	3	1	1
3	3	1	1
4	3	2	1

⑤

3	2	1	1
3	3	1	1
3	3	2	1
4	3	2	1

⑥

4	2	1	1
4	1	1	1
3	1	1	1
2	1	1	1

表2. 4値2変数しきい値関数中のpolycheckの例

性質1によりしきい値関数の集合は万能である，すなわち，任意に与えられた関数F_nをしきい値素子回路で合成できるが，その回路に要する素子数は性質2で評価される．

【性質2】任意の対称論理値A_pにおいて，どのn変数関数も高高式(5)で与えられるK個のしきい値素子を用いて実現される．（[ ]はガウス記号）．

$$K = (p+2)\,p^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + 3np + 1 \qquad (5)$$

(証) 文献[3]の方法により証明される． (証3)

2.3 p値しきい値関数と特性ベクトル

【定義5】関数$F_n(x_1,\cdots,x_n)$の特性ベクトル $\mathbb{b} = (b_{01},\cdots,b_{0p-1};\ b_{11},\cdots,b_{1p-1};\ \cdots;\ b_{n1},\cdots,b_{np-1})$を式(6)で定義する．

$$b_{ij} = \sum_{\rho} x_i(\rho)\left(F_n(\rho)\right)^j \qquad (i=0,1,\cdots,n\ ;\ j=1,\cdots,p-1) \quad (6)$$

ただし，$\sum_{S}$ はあらゆる頂点 S についての和をあらわし，$x_0 \equiv 1$ とする．

【性質3】任意の対称論理値 A_p において，しきい値関数はその特性ベクトル $\mathbb{b}$ と1対1対応する．さらに，重み $\mathbb{a} = (a_1, \cdots, a_n ; t_1, \cdots, t_{p-1})$ と $\mathbb{b}$ との間には式(7)の関係が成立する．

$$\left.\begin{aligned} sgn(a_i) &= sgn(b_{i1}) & (b_{i1} \neq 0) \\ sgn(a_i - a_j) &= sgn(b_{i1} - b_{j1}) & (b_{i1} \neq b_{j1}) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(証) 略．

3値の場合，しきい値関数は $\mathbb{b}' = (b_{01}, b_{02}; b_{11}, \cdots, b_{n1})$ と1対1対応することが知られている[4]．一般に，p 値においてもしきい値関数が $\mathbb{b}' = (b_{01}, \cdots, b_{0p-1}; b_{11}, \cdots, b_{n1})$ と1対1対応するかどうかはまだ知られていない．

性質3は，しきい値関数の個数を評価する際にも利用される．

2.4 p 値しきい値関数の個数

与えられた関数 F_n がしきい値関数であるかどうかは，一般に，用いる対称論理値 A_p の選び方に依存する．したがって，$N(n)$ を n 変数以下の p 値しきい値関数の個数とすると，$N(n)$ は A_p により異なった値をとる．$N(n)$ の A_p による変化のし方は

まだよく知られていない．ただし，$M(n)$を，$a_1=\cdots=a_n=1$ の重みにより実現される n 変数以下の p 値しきい値関数の個数とすると，次の性質4が成立する．

【性質4】 $M_{max}(n)=\max_{A_p} M(n)$，$M_{min}=\min_{A_p} M(n)$ とすると，

$$M_{max}(n)/M_{min}(n) \longrightarrow \infty \quad (n\longrightarrow\infty) \qquad (8)$$

(証) 略．

しかし，次の性質5から知られるように，p 値論理関数の集合全体と比較すれば，p 値しきい値関数の集合の A_p のちがいによる差異はわずかである．

【性質5】任意の A_p にたいして，n 変数以下の p 値しきい値関数の個数 $N(n)$ の上・下界が式(9)で与えられる．

$$p^{\frac{n^2}{2}-n+2} < N(n) < \left[\binom{p^n+p^2-1}{p^2-1}\right]^{(p-1)n}\cdot\left[\binom{p^2-p-1}{p-1}\right]^{p-1} \qquad (9)$$

ここに，右辺の上界の値は，p を固定して $n\longrightarrow\infty$ にしたとき $p^{p^3n^2}$ に近ずく．

(証)下界は文献[5]の方法，上界は文献[6]の方法による．

(証3)

2値の場合，$N(n)\approx 2^{cn^2}$ ($\frac{1}{2}\leqq c\leqq 1$) であり[5),6)]，式(9)の評価 $N(n)\approx p^{c'n^2}$ (c' は n に無関係) と比較すれば興味ある結果と思われる．

3. p-adic 関数とその性質

3.1 p-adic 関数の定義

一般に，4値以上の場合には，ある論理関数F_nがしきい値関数であるかどうかは論理値A_pに依存する．たとえば，図1の4値2変数関数は左側のように等差論理値A_p^*においてはしきい値関数ではないが，右側のような対称論理値A_pにおいてはしきい値関数となる．

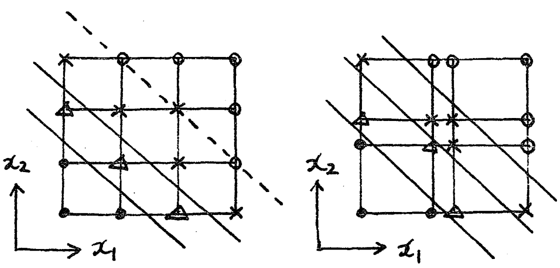

図1.　出力 $\begin{cases} \circ : \alpha_4, & \triangle : \alpha_2 \\ \times : \alpha_3, & \bullet : \alpha_1 \end{cases}$

この性質は，与えられた論理関数をしきい値素子回路で実現する際にある種の困難さをもたらす．すなわち，素子への入力値として用いる電圧値などを変更すると，今まで実現されていた論理関数を新しい電圧値の回路で実現するには回路の結線をあらためて設計しなおす必要が生じる．この困難さをさける1つの方法として，任意の論理値においてしきい値関数であるような特別な関数のみにより回路合成をおこなうことが考えられる．ただし，電圧値などを変更するごとに各素子の重みを計算しなおす必要はある．しかし，素子間の結線状態は変更する必要はない．

【定義6】あらゆる対称論理値A_pにおいてしきい値関数である

p値論理関数を普遍しきい値関数とよぶ。

普遍しきい値関数のうちでも，2値の場合のAO形関数[7]を多値に拡張した，定義7のp-adic関数が重要である。

【定義7】頂点$(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_n})$に$p$進数の値$\rho = (i_n - 1, \cdots, i_1 - 1)_p$を対応させる。そのとき，$\rho_1 > \rho_2$なる頂点対にたいして常に$\varphi(\rho_1) \geqq \varphi(\rho_2)$の関係にある関数$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$を$p$-adic関数の代表とよぶ[注)]。代表$p$-adic関数に同族な関数をすべて$p$-adic関数とよぶ。

《例》表1の①，…，⑦，および表2の関数はいずれも2変数p-adic関数である。

3.2 p-adic関数の性質

【性質6】p-adic関数は普遍しきい値関数である。

(証) 代表p-adic関数が普遍しきい値関数となることを示せば十分であるが，それは$a_n \gg a_{n-1} \gg \cdots \gg a_1 \geqq 0$なる重みを用いればよいことから知られる。 (証了)

この性質6により，p-adic関数のみからなる回路も普遍しきい値関数のみからなる回路と同様の性質をもつ。その際，以下に述べる性質から普遍しきい値関数の大部分がp-adic

注) p-adic関数$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$が代表であることは，$\varphi$の特性ベクトルの要素間に$b_{n1} \geqq \cdots \geqq b_{11} \geqq 0$の関係が成立することと等価。

関数であると予想され，p-adic 関数のみに制限することはそれほど影響を与えないと考えられる．

たとえば，3値2変数しきい値関数の代表22個のうち，15個が p-adic 関数である[注)]．また，2変数 p 値の場合については次の性質7が成立する．

【性質7】 $\gamma_p(n)$ を，“n 変数以下の p-adic 関数の個数 $N_a(n)$”と“n 変数以下の p 値普遍しきい値関数の個数 $N_u(n)$”との比とすると，$p \geqq 2$ にたいして，

$$\gamma_p(1) = 1 \tag{10}$$

$$\gamma_p(2) \geqq \binom{p^2+p-1}{p-1} \Big/ \binom{p^2+c_1p+c_2}{p-1} \tag{11}$$

ただし，c_1，c_2 は定数であり，$c_1=6$，$c_2=0$（p 奇数），$c_1=5$，$c_2=-1$（p 偶数）で与えられる．さらに，式(11)の右辺の下界の値は $p \to \infty$ のとき $e^{-(c_1-1)}$ に近ずく．

（証）式(10)は，1変数 p 値しきい値関数がすべて p-adic 関数であることから示される．

次に式(11)の証明を考える．一般に $N_a(n)$ は式(12)となる．

$$N_a(n) = \binom{p^n+p-1}{p-1} \tag{12}$$

注) 3値のとき，対称論理値は $A_p=\{-1, 0, 1\}$ の1種類のみだから，すべてのしきい値関数が普遍であるとみなされる．

したがって，$Y_p(n)$の下界を求めることは$Nu(n)$の上界を求めることに帰着される．いま，$Lu(n)$を高々2値出力[注)]のn変数以下の普遍しきい値関数の個数とすると，

$$Nu(n) \leqq \binom{Lu(n)+(p-1)-1}{p-1} \tag{13}$$

なぜなら，任意の普遍しきい値関数は，重複を許した適当な$p-1$個の2値出力普遍しきい値関数の組により定められるからである．したがって，$Y_p(n)$の下界を求めるには$Lu(n)$の上界を求めればよいが，$n=2$にたいしては，

$$Lu(2) \leqq \begin{cases} p^2+5p+2 & (p\text{奇数}) \\ p^2+4p+1 & (p\text{偶数}) \end{cases} \tag{14}$$

と評価される．　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証了)

p-adic関数でない2値出力普遍しきい値関数の例を表3にあげる．⑤はpが奇数のときにのみ存在する形である．

①

x_2 \ x_1	1	2	3	4	5
5	1	5	5	5	5
4	1	1	5	5	5
3	1	1	1	5	5
2	1	1	1	1	5
1	1	1	1	1	1

②

1	5	5	5	5
1	1	5	5	5
1	1	1	5	5
1	1	1	5	5
1	1	1	1	5

③

1	1	5	5	5
1	1	1	5	5
1	1	1	5	5
1	1	1	5	5
1	1	1	1	5

注) 出力が高々2種類の値に縮退している，いいかえると，式(1)において$t_1=\cdots=t_{p-1}$の場合に相当する．

④

1	1	1	5	5
1	1	1	1	5
1	1	1	1	5
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

⑤

1	5	5	5	5
1	1	5	5	5
1	1	5	5	5
1	1	1	5	5
1	1	1	5	5

表3. p-adicでない普遍しきい値関数の例

なお，普遍でないn変数以下のp値しきい値関数の個数を$N_{\bar{u}}(n)$とするとき，任意のA_pにおいて$N_{\bar{u}}(n)$も$N(n)$と同じ式(9)で評価されることが知られる．したがって，しきい値関数全体に比較すれば普遍しきい値関数の割合はきわめて小さいと予想される．

p-adic関数のもう1つの重要な性質として，一次元Array回路との関連性がある．すなわち，2値のAO形関数が新しい変数を次々とAND/ORして得られたように，n変数p-adic関数は2変数p-adic関数により次々と新しい変数を付け加えることによって得られる．

【性質8】$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$をn変数p-adic関数とすると，φは$n-1$個の2変数p-adic関数$\varphi^{(i)}(x_1,x_2)$を用いて，

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\varphi^{(n-1)}((\cdots\varphi^{(2)}(\varphi^{(1)}(x_1,x_2),x_3),\cdots),x_n) \tag{15}$$

と構成される．逆も成立する．

（証）略．

3.3 対称，非対称AND/ORとp-adic関数の万能性

p-adic 関数の集合が任意の対称論理値A_pにおいて万能系を成すことを示すため，いくつかの特別なp-adic 関数を考える．それらは，一般に，p値論理関数の表現式を与えるのにも役立つなど興味ある関数とみなされる．

【定義8】i移動演算$x(i)$，対称AND演算$x_1 \cdot x_2$，非対称AND演算$x_1 \cdot\!\times x_2$を各々式(16)，(17)，(18)で定義する．

$$x(i) = \alpha_{j+i} \qquad (x=\alpha_j \text{のとき}) \tag{16}$$

ただし，$\alpha_{j+i} = \alpha_p \ (j+i \geqq p)$，$= \alpha_1 \ (j+i \leqq 1)$ とする．

$$x_1 \cdot x_2 = \begin{cases} \alpha_p & (x_1 = x_2 = \alpha_p \text{のとき}) \\ \alpha_1 & (\text{その他のとき}) \end{cases} \tag{17}$$

$$x_1 \cdot\!\times x_2 = \begin{cases} x_1 & (x_1 \leqq x_2 \text{のとき}) \\ x_1(-1) & (x_1 > x_2 \text{のとき}) \end{cases} \tag{18}$$

また，$x_1 \cdot x_2$，$x_1 \cdot\!\times x_2$ の双対演算 $\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}$，$\overline{\bar{x}_1 \cdot\!\times \bar{x}_2}$を各々対称，非対称ORとよび$x_1 + x_2$，$x_1 \cdot\!+ x_2$であらわす．

対称，非対称AND/ORはいずれも各々2値のAND/ORの拡張である．なお，$x_1 + x_2$，$x_1 \cdot\!+ x_2$は各々式(19)，(20)で与えられる．

$$x_1 + x_2 = \begin{cases} \alpha_1 & (x_1 = x_2 = \alpha_1 \text{のとき}) \\ \alpha_p & (\text{その他のとき}) \end{cases} \tag{19}$$

$$x_1 \cdot\!+ x_2 = \begin{cases} x_1(1) & (x_1 < x_2 \text{のとき}) \\ x_1 & (x_1 \geqq x_2 \text{のとき}) \end{cases} \tag{20}$$

対称AND, ORに関しては，2値のAND, ORの規則がほぼそのまま成立する．ただし，$x \cdot x = \alpha_p \cdot x \neq x$ などに注意する必要がある．また，$x(0) = x$ である．その他，次が成り立つ．

$$x(i) = \begin{cases} x \cdot\times (\alpha_1)^{-i} & (i<0)^{\text{注)}} \\ x \cdot + (\alpha_p)^{i} & (i>0) \end{cases} \tag{21}$$

$$x(-i) = \overline{x(i)} \tag{22}$$

$$x(p-i)\cdot\overline{x}(i-1) + \cdots + x(p-i-l)\cdot\overline{x}(i+l-1) = x(p-i)\cdot\overline{x}(i+l-1) \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{MIN}(x_1, x_2) = x_1 \cdot\times (x_2)^{p-1} \\ &\mathrm{MAX}(x_1, x_2) = x_1 \cdot + (x_2)^{p-1} \\ &\mathrm{CYCL}(x) = x(1) \cdot\times (\overline{x \cdot x})^{p-1} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} &(x_1 \cdot\times x_2) \cdot\times x_1 = x_1 \cdot\times x_2 \\ &x_1 \cdot\times (x_1 \cdot + x_2) = x_1 \\ &x_1 \cdot (x_2 \cdot\times x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

次に，これらの演算を用いて任意の論理関数が表わされることを示す．

【定義9】$F_n(P) = \alpha_i$ である頂点 P の集合を P_i とする．$P \in P_{i_1} \cup \cdots \cup P_{i_l}$ である P にたいして値 α_p となり，その他の P で値 α_1 となる2値出力関数を $F_n^{(i_1, \cdots, i_l)}$ とあらわす．

注）一般に，$x_1 \triangleright (x_2)^i \equiv (((x_1 \underbrace{\triangleright x_2) \triangleright x_2) \triangleright \cdots) \triangleright x_2}_{i\text{個}}$ とする．

任意の関数F_nが，式(26)により，定数，否定，i移動，対称AND，非対称ANDで表わされる．

$$
\begin{cases}
F_n(x_1,\cdots,x_n) = (\cdots((\alpha_p \cdot\!\times F_n^{(p)}) \cdot\!\times F_n^{(p,p-1)}) \cdot\!\times \cdots) \cdot\!\times F_n^{(p,\cdots,2)} & (26\text{-}1) \\
F_n^{(p,\cdots,l)} = \sum_{\substack{\rho=(i_1,\cdots,i_n) \\ \in(P_l\cup\cdots\cup P_p)}} x_1(p-i_1)\cdot\bar{x}_1(i_1-1)\cdot\cdots\cdot x_n(p-i_n)\cdot\bar{x}_n(i_n-1) & (26\text{-}2)
\end{cases}
$$

ただし，Σは対称ORをとることをあらわす．式(26-2)は，式(23)を用いて簡単化され得ることに注意する．

特性ベクトル$\mathbb{b}$において，$b_{n1} \geqq \cdots \geqq b_{11} \geqq 0$ の関係が成立するしきい値関数にたいしては，式(26)は式(27)となる．

$$
F_n^{(p,\cdots,l)} = \sum_{\substack{\rho=(i_1,\cdots,i_n) \\ \in m(P_l\cup\cdots\cup P_p)}} \alpha_p \cdot x_1^{e_1(\rho)}(i_1)\cdot\cdots\cdot x_n^{e_n(\rho)}(i_n) \qquad (27)
$$

ただし，$e_i(\rho)=0,1$であり，$x^0=\alpha_p$，$x^1=x$とする．また，$m(P_l\cup\cdots\cup P_p)$は$P_l\cup\cdots\cup P_p$の極小元の集合とする．式(27)で$\bar{x}$があらわれないことは，2値のunate性に相当する．

(例) 表4の3値3変数しきい値関数F_3の，式(27)による表現を求めると，

$$
F_3 = (1\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot x_3(1)) \cdot\!\times (1\cdot x_3(1) + 1\cdot x_2 + x_1(1)\cdot x_2(1))
$$

x_3	1			2			3			
x_1	1	2	3	1	2	3	1	2	3	x_2
	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
	1	2	2	2	2	2	3	3	3	2
	1	1	1	2	2	2	3	3	3	1

表4.

以上より，

【性質9】 $\{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2,\ \bar{x}_1\cdot\!\times\bar{x}_2\}$は万能系をなす．

(証) $\bar{x}\cdot\times\bar{x}=\bar{x}$により否定が合成され，式(24)により性質9が証明される．あるいは，式(26)において，$\bar{x}$の他にさらに定数α_p，i移動が$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$と$\bar{x}_1\cdot\times\bar{x}_2$のみから合成されることを示しても証明される．(証了)

性質9から，p-adic関数の集合，普遍しきい値関数の集合，しきい値関数の集合(任意のA_pにおいて)の万能性がただちに導びかれる．表1，2において，polypheckであるしきい値関数を示したが，表1の①，…，⑦，表2のすべての関数は各々3，4値のp-adic関数である．したがって，$p \geqq 5$にたいしてもpolypheckであるp-adic関数が存在すると予想される．

4．p-adic関数による回路合成

p-adic関数のみを用いて，与えられた論理関数を実現することの意義についてはすでに述べた．ここで，p-adic関数のみからなる種々の形の回路を考え，その合成手順を求める．

4.1 非対称AND，OR結合回路

式(26-1)においては非対称ANDのみを用いているが，非対称AND，ORを共に用いる式(28)によれば，より簡単な回路を得ることが可能である．ただし，▷は向きまで含めて$\cdot\times$または$\cdot+$の演算をあらわす．

$$F_n = (\cdots((G_n^1 \triangleright G_n^2) \triangleright G_n^3) \triangleright \cdots) \triangleright G_n^k \qquad (28)$$

関数G_n^1, G_n^2, $\cdots$の順に決定されて行くが，式(28)はさらに，ある段階までに決定されたG_nの組が何であってもそれ以後のG_nの組を適当に選ぶことにより常に正しくF_nを実現できるという特徴をもつ．

G_nを順に決定していく手順を考える．そのため，式(28)においてG_n^1からG_n^iまでで打ち切って得られる関数をF_n^iとする．$F_n \neq F_n^i$のときにはG_n^{i+1}を適当に定めて，よりF_nに近い$F_n^{i+1} = F_n^i \triangleright G_n^{i+1}$をつくる必要がある．それには，次の式(29)の条件をできるだけ満たすG_n^{i+1}を選ぶことが望ましい．

$F_n(\rho) = \alpha_s$, $F_n^i(\rho) = \alpha_t$ のとき，

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(i)} & s \geqq t \text{ ならば} & G_n^{i+1}(\rho) \geqq \alpha_t \\ & s < t \text{ ならば} & G_n^{i+1}(\rho) \leqq \alpha_{t-1}\end{array}\right\} \quad (\triangleright \text{を} \cdot\times \text{とする}) \qquad (29\text{-}1)$$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(ii)} & s > t \text{ ならば} & G_n^{i+1}(\rho) \geqq \alpha_{t+1} \\ & s \leqq t \text{ ならば} & G_n^{i+1}(\rho) \leqq \alpha_t\end{array}\right\} \quad (\triangleright \text{を} \cdot+ \text{とする}) \qquad (29\text{-}2)$$

$\triangleright$を$\cdot\times$と$\cdot+$のどちらに決めるかは，たとえば，F_n^{i+1}がよりF_nに近くなる方とする．

決定されたG_n^{i+1}がp-adic関数でないときには，G_n^{i+1}をさらにp-adic関数のみで合成していかなければならない．それゆえ，p-adic関数にできるだけ近いG_n^{i+1}を選ぶことが，回路を簡単にするため望ましい．p-adic関数との近さは，たとえば，

4.2の定義10の逆転度γで与えることが考えられる.

G_n^{i+1}として逆転度が小さい関数が得られたときには,4.2のtree回路によりG_n^{i+1}を実現するのが有効である.そうでないときには,G_n^{i+1}を与えられた関数F_nのかわりとして同様の手順を繰返すことにする.

以上の手順で,式(28)による回路が合成されるが,式(29)の条件をできるだけ満たすことと,逆転度をできるだけ小さくすることを同時におこなうには試行錯誤にたよらざるを得ないのが難点である.

4.2 2変数p-adic tree回路

まず,関数F_nの逆転度γの定義をする.そのため,σを変数$x_1, \cdots, x_n$の置換,否定の操作とし,σのもとでの頂点の番号ずけをつぎの$\rho(\sigma)$で与える;

頂点$(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_n})$の番号$\rho(\sigma)$を,頂点$\sigma(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_n})$の定義7により与えられた$p$進数値$\rho$に等しく定める.

σが何もしない単位操作ならば,$\rho(\sigma)$は定義7のρに一致することに注意する.

【定義10】となりあう2つの頂点$\rho_1(\sigma)$, $\rho_2(\sigma) = \rho_1(\sigma) + 1$において,出力が$F_n(\rho_1(\sigma)) = \alpha_{j_1} > F_n(\rho_2(\sigma)) = \alpha_{j_2}$ $(j_2 < j_1)$と逆転しているとき,$(\rho_2(\sigma), \rho_1(\sigma))$を$\sigma$における逆転頂点対,$(\alpha_{j_2}, \alpha_{j_1})$

を逆転出力対とよぶ．逆転出力対が$(\alpha_j, \alpha_{j'})$である逆転頂点対の集合を$Q(j, j')$とする$(j<j')$．そして，F_nの逆転度γを式(30)で定める．

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \min_{\sigma} \gamma(\sigma) \\ \gamma(\sigma) &\equiv \sum_{j=1}^{p-1} (j'-j)\cdot \# Q(j, j') \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

ただし，$\# Q(j, j')$は集合$Q(j, j')$の要素数とする．

定義より，次の性質10がただちにいえる．

【性質10】F_nは，その逆転度γが0のとき，およびそのときにかぎりp-adic関数である．

さて，ここでは図2の，2変数p-adic関数からなるtree回路による合成を考える．性質9より，2つのn変数関数H_n^1，H_n^2を適当に選べば，与えられた関数F_nを$F_n = \varphi_2(H_n^1, H_n^2)$と実現する2変数$p$-adic関数$\varphi_2(x_1, x_2)$が存在する．そのとき，必要ならば変数の置換，否定をすることにより，φ_2は代表p-adic関数としてよいことに注意する．

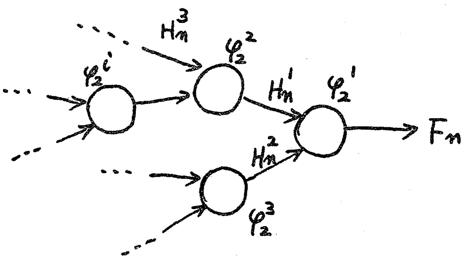

図2. tree 回路

つぎに，H_n^1，H_n^2を各々与えられた関数とみなして同様の合成手順を繰返す．あらわれたH_nがp-adic関数であれば，式(15)によりH_nは2変数p-adic関数の1次元Arrayで合成され，

したがって，その枝については手順を終了することができる．すべての枝について有限回の手順で終了できる，すなわち，有限回の手順で F_n の回路が合成できることは，H_n の逆転度を小さくしていくことができることを以下のように示して保証される．

【定義 11】式(30)において，関数 F_n の逆転度を与える σ を σ^* とし，σ^* における $Q(j,j')$ を $Q^*(j,j')$ とする．$Q^*(j,j') \neq \phi$ である j のうちの最小の値を j_0 とする．そのとき，$Q^*(j_0, j_0+1) \neq \phi$ で，その他の $Q^*(j,j')$ はすべて空集合である関数 F_n を準 p-adic 関数とよぶ．

【性質 11】F_n が p-adic，準 p-adic 関数でないなら，

$$\left.\begin{array}{c} F_n = \varphi_2(H_n^1, H_n^2) \\ \gamma[H_n^1],\ \gamma[H_n^2] < \gamma[F_n] \end{array}\right\} \qquad (31)$$

（F_n の逆転度を，一般に，$\gamma[F_n]$ とあらわす）

を同時に満たす関数の組 φ_2，H_n^1，H_n^2 が常に存在する。

（証） $\varphi_2(x_1, x_2)$ を次のように定める．

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_2(x_1, x_2) = x_2 & (x_2 \neq \alpha_{j_0+1} \text{ のとき}) \\ \varphi_2(x_1, \alpha_{j_0+1}) = \begin{cases} \alpha_{j_0} & (x_1 = \alpha_1 \text{ のとき}) \\ \alpha_{j_0+1} & (x_1 = \alpha_2, \cdots, \alpha_p \text{ のとき}) \end{cases} & \end{array}\right\} \qquad (32)$$

そして，F_n において出力値 α_{j_0} を α_{j_0+1} に変更して得られる関数

をH_n^2とする．H_n^1は，$F_n=\alpha_{j_0}$の頂点で出力値α_1，$F_n=\alpha_{j_0+1}$の頂点で出力値α_2をとるとし，その他の頂点ではH_n^1の逆転度が小さくなるように適当にα_1, α_2の一方を出力値とする．

以上のように関数φ_2, H_n^1, H_n^2を求めたとき，明らかに$\varphi_2(H_n^1, H_n^2)=F_n$であり，また，$H_n^1, H_n^2$の逆転度が共に$F_n$の逆転度より真に小さくなることがいえる．　(証了)

H_nが準p-adic関数となった枝については，4.1の合成法により，H_nは容易に合成される．以上により，有限回の手順で回路が完成されることが保証される．

また，上記のことがらをもう少し詳しく検討することにより，図2の回路に要する素子数の上界が評価される．

【性質12】任意のn変数関数F_nは，高々$r+n$段，$5nr+3r-2n-1$素子以下の2変数p-adic関数tree回路で合成される．ただし，rはF_nの逆転度の値である．

なお，n変数関数にたいする逆転度rの上界として次が知られる．

$$r \leqq (p-1)p^n/2 \tag{33}$$

性質11の証明で述べたようにφ_2, H_n^1, H_n^2を選べば回路は完成されるが，他の組を選ぶことによりさらに逆転度の小さいH_n^1, H_n^2を得る可能性がある．それは，回路の素子数を減らすために重要であるが，その手順については省略する[8]．

4.3 p-adic－threshold回路

ここでは，図3の2段回路を考える．才1段の素子$L_1,\cdots,L_k$の出力φ_n^iはいずれも代表p-adic関数とする．また，出力素子Lはしきい値素子とする．なお，出力素子Lはアナログ加算器であるとしても良いことが知られ，そのように制限すれば，普遍しきい値素子のみからなる回路と同じ性質をもつ回路が得られる．

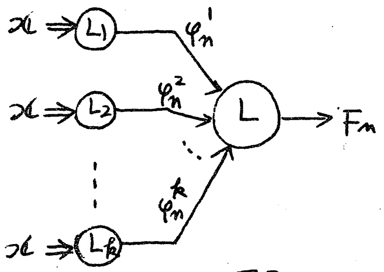

図3.

出力素子Lの重みを$a=(a_1,\cdots,a_k;t_1,\cdots,t_{p-1})$とすると，素子Lへの入力荷重和$f_L(\rho)$は，

$$f_L(\rho)=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_n^i(\rho) \tag{34}$$

で与えられる．ただし，頂点番号ρは定義7におけるp進数の値である．与えられた実現すべき関数F_n，素子L_iの出力φ_n^i，式(34)のf_Lはいずれも，$\rho=0,1,\cdots,p^n-1$にたいする値を要素とするp^n次元ベクトルともみなされ，$\mathbf{F}_n$，$\boldsymbol{\varphi}_n^i$，$\mathbf{f}_L$とあらわすことにする．

図3の回路を合成することは，次の性質(*)をもつベクトルの組$(\mathbf{f}_L,\boldsymbol{\varphi}_n^1,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n^k)$を求めることに帰着される．

(*) (i) 適当なしきい値$t_1,\cdots,t_{p-1}$を選んで$\mathbf{f}_L$を量子化する

ことにより，関数F_nが実現される．

(ii) f_Lは$\varphi_n^1, \cdots, \varphi_n^k$の一次結合としてあらわされる，すなわち，適当な$a_1, \cdots, a_k$にたいして式(34)が成立する．ただし，$\varphi_n^i$はいずれも

$$\varphi_n^i(\rho=0) \leqq \cdots \leqq \varphi_n^i(\rho=p^n-1)$$

を満たす単調非減少ベクトルであり，各要素の値は$\alpha_1, \cdots, \alpha_p$のいずれかである．

f_Lとして，F_n自身に選んでも性質(*)(i)は満たされる．しかも，そのとき量子化は必要でなく，出力素子Lはアナログ加算器で良いことが知られる．性質(*)(i)を満たす任意のf_Lにたいして，性質(*)(ii)を満たす$\varphi_n^1, \cdots, \varphi_n^k$が存在することは，たとえば，

$$\varphi_n^i = (\overset{0}{\alpha_1}, \cdots, \overset{i-1}{\alpha_1}, \overset{i}{\alpha_p}, \cdots, \overset{p^n-1}{\alpha_p}) \tag{35}$$

$$(i=1, \cdots, p^n-1\ ;\ k=p^n-1)$$

とすればよいことから知られる．したがって，任意の関数F_nが図3の2段回路で合成可能である．また，回路に必要な素子数kの上界として，$k \leqq p^n-1$が知られる．しかし，この素子数の上界はもっと良いものにできる．

【定義12】一般に，ベクトルvから次の操作により得られるベクトルを$\tilde{v}$であらわす：

vにおいて2つ以上の相続く要素が等しいとき，それらの

うちの1つの要素のみを残して他を取り去る．

【性質13】与えられた関数F_nにたいするベクトル$\tilde{\mathbb{F}}_n$の次元数をℓとすると，F_nは任意の対称論理値A_pにおいて，

$$\ell-1 \geqq k \geqq (\ell-1)/(p-1) \tag{36}$$

の素子数kの2段回路で合成される．

（証）上界は，$f_L=\mathbb{F}_n$，φ_n^iを式(35)のように選んで得られる．下界は，式(34)において，$f_L(\rho)\neq f_L(\rho')$である任意の頂点対(ρ,ρ')にたいして少くとも1つのiにたいして$\varphi_n^i(\rho)\neq\varphi_n^i(\rho')$でなければならないことから示される．（証了）

定義12で定まる$\tilde{\mathbb{F}}_n$の次元数ℓの値の範囲については，n変数関数F_nにたいして$\ell\leqq p^n$であることは当然であるが，F_nに同族な関数のいずれにたいしても$\ell=p^n$となるような関数F_nが存在する($p\geqq 3$)．

値ℓは逆転度rと同様に，p-adic関数との近さをあらわしていると考えられるが，実際，次の式(37)の関係が成立する．

$$\left[\frac{\ell}{p+1}\right] \leqq r \leqq (p-1)\left[\frac{\ell-1}{2}\right] \tag{37}$$

ここに，[ ]はガウス記号であり，式(37)の右辺に$\ell\leqq p^n$を代入することにより式(33)の逆転度rの上界が得られる．

なお，値ℓは2値にたいしては run measure[9]と一致し，式(38)が知られる．

$$\left.\begin{array}{l} r = \left[\frac{\ell-1}{2}\right] \\ \ell \leqq (2^{n+1}+1+\mathrm{mod}_2 n)/3 \end{array}\right\} \quad (p=2) \qquad (38)$$

等差論理値にたいしては，次のように素子数 k が評価される．

【性質14】等差論理値 A_p^* においては，

$$k \leqq \frac{p^n-1}{p-1} + (2p-1) \qquad (39)$$

(証) まず，$f_L = F_n$，φ_n^i を式(35)のように定めて，式(34)により F_n を実現する．そのとき，等しい係数 a_i をもった $p-1$ 個以下の φ_n^i の和は，1つの代表 p-adic 関数 φ にまとめられる．

(証了)

式(36)により，素子数 k の下界が得られるが，その下界の値に近い素子数の回路を合成することは一般には簡単ではない．しかし，等差論理値の場合には，p-adic 関数を $p-1$ 次元ベクトルとしてあらわすことにより，試行錯誤的ではあるが，素子数を削減していくことが可能である．なお，以下の場合にかぎって，$A_p^* = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ とする．

【定義13】代表 p-adic 関数 φ_n を，$\varphi_n = [i_1, \cdots, i_{p-1}]$ とあらわす．ただし，i_j は $\varphi_n(\rho) = j$ となる最小の頂点 ρ の番号であり，$\varphi_n(\rho) = j$ となる頂点が存在しないときは $i_j = *$ とする ($j=1$,

$\cdots, p-1)$.

以下の規則により，素子数を減少させる．

(Rule 1) $[i_1, \cdots, i_s, *, \cdots, *] + [j_1, \cdots, j_t, *, \cdots, *]$

$= [m_1, \cdots, m_{p-1}]$ （ただし，$s+t \leq p-1$）

ここに，m_iは次の例に示される手順で決定される．

(例) $[1, 2, *, *, *] + [*, 2, *, *, *]$ を求める．まず，$J_1 = \{1, 2\}$，$J_2 = \{(*2)\}$ なる集合をつくり，それらから，$J_3 = \{1, 2, (*2)\}$ をつくる．ただし，その際，$*$は後続の数字と一括して扱う．後続する数字がないときは，その$*$は無視される．つぎに，J_3の要素を大小順にならべ$[1, 2, (*2)]$とする．このとき，2と$(*2)$は同順位とみなされる．そして，重複した数字のうち先行するものを$*$とし，また，必要ならば最後に$*$をいくつか付け加える．結果は，$[1, *, *, 2, *]$となる．

(Rule 2) 2つのp-adic関数の差をとり，他のあるp-adic関数に変形する規則．Rule 1の逆の手順で計算される．

(Rule 3) $[*, \cdots, *, 0, i_{s+1}, \cdots, i_{p-1}] = s\,\mathbb{1} + [i_{s+1}, \cdots, i_{p-1}, *, \cdots, *]$

ただし，$\mathbb{1}$は出力1のみをとる定数関数であり，出力素子Lのしきい値の値を変えることにより省かれる．

(例) 5値の2変数関数 $F_2 = \mathrm{MIN}(x_1, x_2)$ をA_p^*において合成する．

$f_L = F_2 = (\overset{0}{0}0000/01111/01222/01233/0123\overset{24}{4})$ とする．

φ_2^iとして式(35)のように選ぶ，すなわち，$\varphi_2^i = [i, *, *, *]$と選ぶことにより，

$$f_L = [6,*,*,*] - [10,*,*,*] + [11,*,*,*] + [12,*,*,*]$$
$$- 2[15,*,*,*] + \cdots\cdots$$

とあらわされ，Rule 1を用いれば，

$$f_L = [6,11,16,21] + [12,17,22,24] + [18,23,*,*]$$
$$- [10,*,*,20] - 2[15,*,*,*]$$

さらに，最後の3項を変形することにより，

$$f_L = [6,11,16,21] + [12,17,22,24] + [10,18,20,23] - 2[10,15,*,20]$$

となり，素子数$k=4$の回路で合成される．なお，式(36)のkの下界の値は，$l=14$，$p=5$として$k \geqq 13/4 \fallingdotseq 3.3$となり，得られた回路はこの例では最小素子数である．

5. むすび

多値しきい値関数を考察する際，論理値A_pの選択による影響という2値の場合には生じなかった問題点が新たり生じることを指摘し，その一解決法として，普遍しきい値関数を定義した．普遍しきい値関数のうちでも，2値のAO形関数の拡張であるp-adic関数が簡単な性質をもち有用であることが知られた．さらに，特別なp-adic関数である対称，非対称、AND/ORが，2値のAND/ORに相当する基本的演算の役割をは

たす可能性があることが示された．

しかし，論理値A_pが全く自由に選べるならば等差論理値A_p^*を選ぶのが自然であろうし，素子の実現の点からも有理であると考えられる．したがって，等差論理値A_p^*を選んだときの基本演算としては，もっと便利なものがないかどうかさらに検討を要すると考えられる．

おわりに，日頃熱心に討論していただく研究室の皆さんに感謝する．

【文献】

[1] W.H. Hanson: "Ternary threshold logic", IEEE EC-12, P.191 (Jun, 1963).

[2] 田中，田原："三値論理関数の完全性とPolypheck"，信学論(C)，53-C，2，P.111 (昭45-1).

[3] 室賀："オートマトン入門"，共立.

[4] 北橋 et al："三値論理関数の特徴パラメータとしきい値関数への応用"，信学論(C)，52-C，10，P.641 (昭44-10).

[5] Yajima, Ibaraki: "A Lower Bound of the Number of Threshold Functions", IEEE EC-14, P.926 (Dec. 1965).

[6] Hu: "Threshold Logic", University of California Press, 1965.

[7] 羽賀, 福村: "しきい値関数のあるSubclassについて," 信学論(C), 54-C, 4, P.302 (昭46-4).

[8] 羽賀, 阿部, 福村: "多値しきい値関数による回路合成について," 信学会全国大会 43 (昭45).

[9] Elspas, Short: "A Bound on the Run Measure of Switching Functions," IEEE EC-13, P.1 (Feb. 1964).

[10] 羽賀, 阿部, 福村: "多値しきい値関数について," オート・インホ研資, $\frac{A}{IT}$ 70-6 (1970-04).

完